Secondo allenamento

Olimpiadi Italiane di Informatica - Selezione territoriale

Luca Chiodini
luca@chiodini.org

20 marzo 2019

Programma

1. Lettura e analisi di un problema

2. Soluzione naïve

3. Spiegazione teorica

4. Soluzione ottima

Lettura e analisi di un problema

“Rifornimenti ai distributori” (prima gara OIS 2015)

“Rifornimenti ai distributori” (prima gara OIS 2015)

Gabriele ha appena preso la patente, e decide di invitare tutti i suoi amici a fare una gita. Dato che il viaggio è lungo ben K chilometri, sa che forse dovrà fermarsi a fare il pieno di benzina: a tal proposito Gabriele ha segnato a che distanza dalla partenza ci sono gli N distributori che si trovano lungo il tragitto. Sapendo che la sua macchina fa al massimo M chilometri con un pieno, e che alla partenza ha già il serbatoio pieno, aiuta Gabriele a pianificare i rifornimenti di modo da fare benzina il minor numero possibile di volte.

"Rifornimenti ai distributori" (prima gara OIS 2015)

Il file `input.txt` è composto da due righe. La prima riga contiene i tre interi N, M, K separati da uno spazio. La seconda riga contiene N interi separati da uno spazio, le distanze D_i dei distributori in ordine crescente.

input.txt	output.txt
5 50 100 29 35 50 77 83	1

“Rifornimenti ai distributori” (prima gara OIS 2015)

Il file `input.txt` è composto da due righe. La prima riga contiene i tre interi N, M, K separati da uno spazio. La seconda riga contiene N interi separati da uno spazio, le distanze D_i dei distributori in ordine crescente.

input.txt	output.txt
5 50 100 29 35 50 77 83	1

input.txt	output.txt
10 30 100 1 31 33 38 62 69 93 97 98 99	6

“Rifornimenti ai distributori” (prima gara OIS 2015)

Casi limite

È possibile che la risposta al problema sia 0? È possibile che non ci sia risposta al problema?

“Rifornimenti ai distributori” (prima gara OIS 2015)

Casi limite

È possibile che la risposta al problema sia 0? È possibile che non ci sia risposta al problema?

Assunzioni

- $1 \leq N \leq 100\,000$.
- $1 \leq M \leq K \leq 1\,000\,000$.
- $1 \leq D_i < D_{i+1} < K$ per ogni $i = 0 \ldots N - 2$.
- È sempre possibile raggiungere la destinazione: la distanza tra due distributori successivi non supera mai M, il numero di chilometri che la macchina è in grado di percorrere con un pieno.

“Rifornimenti ai distributori” (prima gara OIS 2015)

Casi limite

È possibile che la risposta al problema sia 0? È possibile che non ci sia risposta al problema?

Assunzioni

- $1 \leq N \leq 100\,000$.
- $1 \leq M \leq K \leq 1\,000\,000$.
- $1 \leq D_i < D_{i+1} < K$ per ogni $i = 0 \ldots N-2$.
- È sempre possibile raggiungere la destinazione: la distanza tra due distributori successivi non supera mai M, il numero di chilometri che la macchina è in grado di percorrere con un pieno.

Nuovo caso limite

È possibile che ci siano due distributori nello stesso posto?

Soluzione naïve

“Rifornimenti ai distributori” - Soluzione naïve

In questo genere di problemi, un approccio che funziona *sempre* è il cosiddetto metodo “forza bruta” (detto informalmente: “le provo tutte”). Come si può applicare in questo problema?

29	35	50	77	83

“Rifornimenti ai distributori” - Soluzione naïve

In questo genere di problemi, un approccio che funziona *sempre* è il cosiddetto metodo “forza bruta” (detto informalmente: “le provo tutte”). Come si può applicare in questo problema?

29	35	50	77	83

0	0	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	0	1	1

...

1	1	1	1	1

“Rifornimenti ai distributori” - Soluzione naïve

Dato un vettore V, dove $V_i = 1$ sse è previsto un rifornimento in quel distributore, siamo in grado di stabilire se con quei rifornimenti arriviamo in fondo?

$$M = 50 \qquad K = 100$$

29	35	50	77	83

1	1	1	1	1

“Rifornimenti ai distributori” - Soluzione naïve

Dato un vettore V, dove $V_i = 1$ sse è previsto un rifornimento in quel distributore, siamo in grado di stabilire se con quei rifornimenti arriviamo in fondo?

$M = 50 \qquad K = 100$

29	35	50	77	83

1	0	1	1	0

“Rifornimenti ai distributori” - Soluzione naïve

Dato un vettore V, dove $V_i = 1$ sse è previsto un rifornimento in quel distributore, siamo in grado di stabilire se con quei rifornimenti arriviamo in fondo?

$$M = 50 \qquad K = 100$$

29	35	50	77	83

1	0	0	0	1

“Rifornimenti ai distributori” - Soluzione naïve

Dato un vettore V, dove $V_i = 1$ sse è previsto un rifornimento in quel distributore, siamo in grado di stabilire se con quei rifornimenti arriviamo in fondo?

$$M = 50 \qquad K = 100$$

29	35	50	77	83

0	0	0	1	1

“Rifornimenti ai distributori” - Soluzione naïve

Dato un vettore V, dove $V_i = 1$ sse è previsto un rifornimento in quel distributore, siamo in grado di stabilire se con quei rifornimenti arriviamo in fondo?

$$M = 50 \qquad K = 100$$

29	35	50	77	83

0	1	0	0	0

“Rifornimenti ai distributori” - Soluzione naïve

Soluzione

La soluzione consiste quindi nel cercare tra tutte le possibili configurazioni *valide* quella che usa il *minor numero* di distributori.

“Rifornimenti ai distributori” - Soluzione naïve

Soluzione

La soluzione consiste quindi nel cercare tra tutte le possibili configurazioni *valide* quella che usa il *minor numero* di distributori.

Complessità computazionale

Qual è la complessità necessaria per generare le disposizioni?

“Rifornimenti ai distributori” - Soluzione naïve

Soluzione

La soluzione consiste quindi nel cercare tra tutte le possibili configurazioni *valide* quella che usa il *minor numero* di distributori.

Complessità computazionale

Qual è la complessità necessaria per generare le disposizioni?

- Intuitivamente: abbiamo due possibilità per la prima posizione del vettore. Quindi, fissata la prima posizione, ne abbiamo altre due per la seconda posizione (e così via). In tutto quindi

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{N \text{ volte}} = 2^N$$

“Rifornimenti ai distributori” - Soluzione naïve

Soluzione

La soluzione consiste quindi nel cercare tra tutte le possibili configurazioni *valide* quella che usa il *minor numero* di distributori.

Complessità computazionale

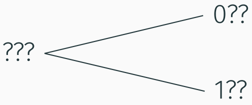
Qual è la complessità necessaria per generare le disposizioni?

- Intuitivamente: abbiamo due possibilità per la prima posizione del vettore. Quindi, fissata la prima posizione, ne abbiamo altre due per la seconda posizione (e così via). In tutto quindi

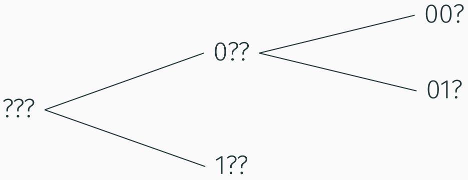
$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{N \text{ volte}} = 2^N$$

- Calcolo combinatorio: disposizioni con ripetizione di due elementi (0 - 1) su N posizioni $\implies 2^N$

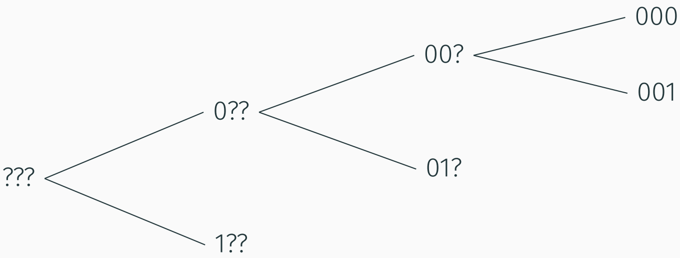
“Rifornimenti ai distributori” - Soluzione naïve



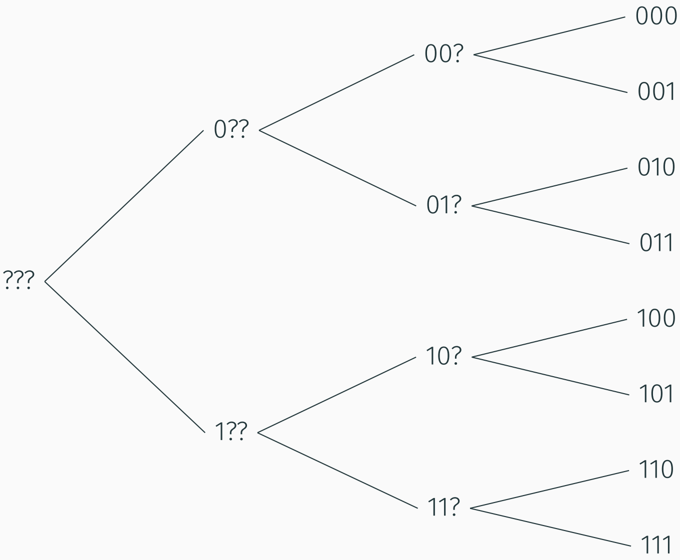
“Rifornimenti ai distributori” - Soluzione naïve



“Rifornimenti ai distributori” - Soluzione naïve



“Rifornimenti ai distributori” - Soluzione naïve



“Rifornimenti ai distributori” - Soluzione naïve

```
void genera_disposizioni(bool V[], int posizione)
{
    if (posizione == N) {
        if (controlla(V))
            // Conta rifornimenti e aggiorna minimo.
    }
    else {
        V[posizione] = false;
        genera_disposizioni(V, posizione + 1);
        V[posizione] = true;
        genera_disposizioni(V, posizione + 1);
    }
}

genera_disposizioni(V, 0);
```

“Rifornimenti ai distributori” - Soluzione naïve

Che complessità computazionale ha la soluzione naïve?

“Rifornimenti ai distributori” - Soluzione naïve

Che complessità computazionale ha la soluzione naïve?

- Generare tutte le possibili disposizioni richiede $\mathcal{O}(2^N)$

“Rifornimenti ai distributori” - Soluzione naïve

Che complessità computazionale ha la soluzione naïve?

- Generare tutte le possibili disposizioni richiede $\mathcal{O}(2^N)$
- Data una configurazione, controllarne la validità richiede $\mathcal{O}(N)$

La soluzione ha quindi complessità $\mathcal{O}(N \cdot 2^N)$.

Spiegazione teorica

Problemi greedy

Greedy

Alcuni problemi possono essere risolti facendo di volta in volta la scelta migliore localmente.

Questa serie di scelte migliori “locali”, cioè dipendenti solo da quello che “si sa” al momento della scelta, si riflette alla fine nella soluzione globale migliore possibile.

Esempio di problema greedy

Esempio: acquisto di biglietti per un concerto

Esistono M siti che vendono biglietti per lo stesso concerto a prezzi diversi. Devo comprare N biglietti (ovviamente spendendo in totale il meno possibile). Cosa faccio?

Esempio di problema greedy

Esempio: acquisto di biglietti per un concerto

Esistono M siti che vendono biglietti per lo stesso concerto a prezzi diversi. Devo comprare N biglietti (ovviamente spendendo in totale il meno possibile). Cosa faccio? Seguo questo semplice algoritmo:

- Scelgo il sito dove i biglietti costano meno.
- Compro tutti i biglietti disponibili su quel sito per arrivare ad avere N biglietti
    - Se ora ho N biglietti, ho finito.
    - Se non ho ancora N biglietti, ripeto dall'inizio il procedimento.

Esempio di problema greedy

Esempio: acquisto di biglietti per un concerto

- L’algoritmo è ottimale?

Esempio di problema greedy

Esempio: acquisto di biglietti per un concerto

- L'algoritmo è ottimale? Sì, perché non c'è alcuna convenienza a scegliere i biglietti partendo da un sito in cui il costo non sia il minimo.
- È necessario applicare un algoritmo di ordinamento?

Esempio di problema greedy

Esempio: acquisto di biglietti per un concerto

- L'algoritmo è ottimale? Sì, perché non c'è alcuna convenienza a scegliere i biglietti partendo da un sito in cui il costo non sia il minimo.
- È necessario applicare un algoritmo di ordinamento? Sì (a meno che i dati non siano già ordinati)
- Qual è la complessità computazionale?

Esempio di problema greedy

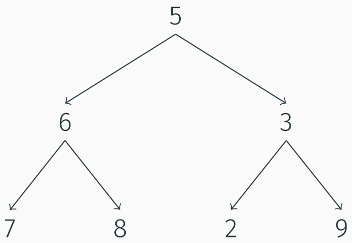
Esempio: acquisto di biglietti per un concerto

- L'algoritmo è ottimale? Sì, perché non c'è alcuna convenienza a scegliere i biglietti partendo da un sito in cui il costo non sia il minimo.
- È necessario applicare un algoritmo di ordinamento? Sì (a meno che i dati non siano già ordinati)
- Qual è la complessità computazionale?
  - $\mathcal{O}(M \log M + N)$ con ordinamento;
  - $\mathcal{O}(N)$ se i dati sono già ordinati opportunamente.

È un problema greedy?

È un problema greedy?

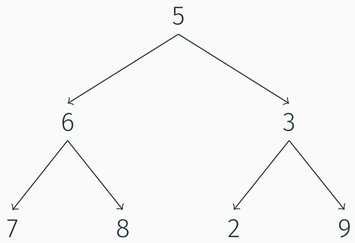
Determinare la somma massima ottenibile partendo dalla radice e arrivando a una foglia.



È un problema greedy?

È un problema greedy?

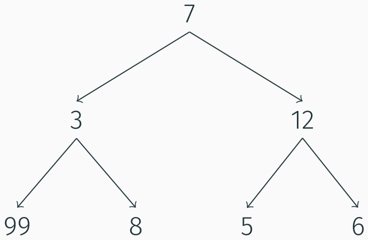
Determinare la somma massima ottenibile partendo dalla radice e arrivando a una foglia.



È un problema greedy?
Attenzione a non farsi ingannare da casi particolari... Dire che un problema ammette soluzione greedy significa dire che tale soluzione è *ottima* in *tutti* i casi possibili!

Esempio di problema NON greedy

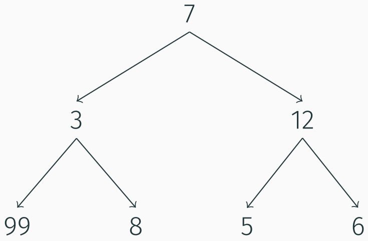
Determinare la somma massima ottenibile partendo dalla radice e arrivando a una foglia.



È un problema greedy?

Esempio di problema NON greedy

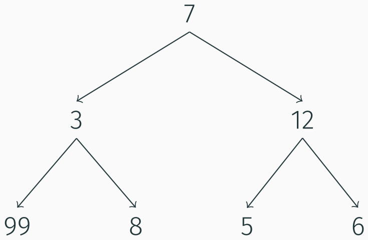
Determinare la somma massima ottenibile partendo dalla radice e arrivando a una foglia.



È un problema greedy? No, perché la miglior scelta locale non porta alla miglior scelta globale.

Esempio di problema NON greedy

Determinare la somma massima ottenibile partendo dalla radice e arrivando a una foglia.



È un problema greedy? No, perché la miglior scelta locale non porta alla miglior scelta globale.
Questo è *identico* al problema `discesa` (territoriali 2016).

Soluzione ottima

“Rifornimenti ai distributori” - Soluzione ottima

Cosa si può osservare nell’esempio di input?

29	35	50	77	83

“Rifornimenti ai distributori” - Soluzione ottima

Cosa si può osservare nell’esempio di input?

29	35	50	77	83

I distributori sono ordinati. Il problema è greedy?

“Rifornimenti ai distributori” - Soluzione ottima

Dimostrazione

Consideriamo l’i-esimo distributore a cui arriviamo con il serbatoio che contiene ancora L litri di benzina (vale $L \leq M$). Consideriamo inoltre l’$i+1$-esimo distributore. Possono verificarsi due casi:

- La distanza tra i due distributori vale $D_{i+1} - D_i > L$. È imperativo fermarsi nell’i-esimo distributore, perché il successivo è troppo lontano.
- La distanza tra i due distributori vale $D_{i+1} - D_i \leq L$. Non c’è alcuna convenienza a fermarsi nell’i-esimo distributore, visto che si può raggiungere il successivo e fare il pieno.

“Rifornimenti ai distributori” - Soluzione ottima

Complessità computazionale

Qual è la complessità computazionale dell’algoritmo che abbiamo progettato?

“Rifornimenti ai distributori” - Soluzione ottima

Complessità computazionale

Qual è la complessità computazionale dell’algoritmo che abbiamo progettato? $\mathcal{O}(N)$.

"Rifornimenti ai distributori" - Soluzione ottima

Complessità computazionale

Qual è la complessità computazionale dell'algoritmo che abbiamo progettato? $\mathcal{O}(N)$.

Consiglio implementativo

Prestate attenzione all'ultimo distributore: non basta fermarsi lì, ma è necessario arrivare a percorrere *tutti* i K chilometri.

Altri problemi greedy

Problemi che ammettono soluzione greedy

Altri problemi greedy

Problemi che ammettono soluzione greedy

- `somme`
    - GATOR 2016
    - Greedy semplice

Altri problemi greedy

Problemi che ammettono soluzione greedy

- `somme`
  - GATOR 2016
  - Greedy semplice
- `plugs`
  - Olimpiadi a squadre 2017
  - Greedy con ordinamento particolare

Altri problemi greedy

Problemi che ammettono soluzione greedy

- `somme`
  - GATOR 2016
  - Greedy semplice
- `plugs`
  - Olimpiadi a squadre 2017
  - Greedy con ordinamento particolare
- `aeroporto`
  - Finale nazionale OII 2015
  - Greedy fissato K + ricerca binaria

Tocca a voi!

Esercizio

Implementare una soluzione per il problema “distributori”.

Riferimenti

Questa presentazione e soluzione in C++ dell’esercizio:

`https://files.chiodini.org/OII_Territoriali_2019/`

- Piattaforma di allenamento con correttore e forum:
  `https://training.olinfo.it`
- Guida alle selezioni territoriali del prof. Bugatti:
  `http://www.imparando.net/sito/olimpiadi_di_informatica.htm`