

# Primo allenamento

Olimpiadi Italiane di Informatica - Selezione territoriale

---

Luca Chiodini

luca@chiodini.org - l.chiodini@campus.unimib.it

16 febbraio 2017

1. Lettura e analisi di un problema
2. Soluzione naïve
3. Spiegazione teorica
4. Soluzione ottima

## Lettura e analisi di un problema

---



## “Anno luce” (finale OIS 2016)

Grazie ad una recente ricerca che ha confermato l'esistenza delle onde gravitazionali, sempre più persone si stanno interessando allo spazio. Purtroppo però, lo spazio è ancora una realtà poco accessibile alle persone comuni. Sebbene sia un po' demoralizzato da questo fatto, William è convinto che sia possibile sfruttare la recente attenzione mediatica delle onde gravitazionali per pubblicizzare un business: ha deciso infatti di aprire una startup di viaggi interstellari.

C'è da dire però che, a parte il Sole che è la stella a noi più vicina, le altre stelle sono piuttosto distanti. Proxima Centauri, la “seconda stella più vicina”, dista dal Sole ben 4.24 anni luce: questo vuol dire che sarebbero necessari più di quattro anni per raggiungere questa stella! (supponendo di poter viaggiare alla velocità della luce).

## “Anno luce” (finale OIS 2016)

William pensa di riuscire a costruire un’astronave in grado di viaggiare alla velocità della luce (ha trovato un tutorial su YouTube che gli sembra piuttosto convincente) e ha perciò acquistato un telescopio per tracciare una mappa 3D della Via Lattea. Ogni stella è indicata nella mappa 3D mediante un punto  $(x,y,z)$  dello spazio. Il Sole è sempre presente nella mappa ed è sempre identificato dal punto  $(0,0,0)$ .

Scrivi un programma che data la mappa stellare sia in grado di rispondere a  $Q$  query: ogni query fornisce un numero intero  $D$  e chiede quante sono le stelle raggiungibili avendo a disposizione  $D$  anni di viaggio.

## “Anno luce” (finale OIS 2016)

---

input.txt	output.txt
3	1
0 0 0	1
2 2 2	2
1 1 1	2
5	3
0	
1	
2	
3	
4	

---

## Soluzione naïve

---



## Coordinate

Ogni stella è caratterizzata dall'aver tre coordinate  $(x, y, z)$ . Cosa è *davvero* interessante?

## Coordinate

Ogni stella è caratterizzata dall'aver tre coordinate  $(x, y, z)$ . Cosa è *davvero* interessante?

## Distanza

Calcoliamo la distanza euclidea nello spazio tra ciascuna stella e il Sole.

$$\text{distanza} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

## “Anno luce” - Soluzione naïve

Riprendiamo l'esempio iniziale e visualizziamo cosa abbiamo ottenuto, supponendo di memorizzare la distanza dell' $i$ -esima stella nell' $i$ -esima posizione di un vettore **distanza**.

## “Anno luce” - Soluzione naïve

Riprendiamo l'esempio iniziale e visualizziamo cosa abbiamo ottenuto, supponendo di memorizzare la distanza dell' $i$ -esima stella nell' $i$ -esima posizione di un vettore **distanza**.

input.txt	output.txt
3	1
0 0 0	1
2 2 2	2
1 1 1	2
5	3
0	
1	
2	
3	
4	

0	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
---	-------------	------------

## “Anno luce” - Soluzione naïve

0	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
---	-------------	------------

Data una query (ovvero il numero di anni luce per cui è concesso viaggiare), qual è la risposta?

## “Anno luce” - Soluzione naïve

0	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
---	-------------	------------

Data una query (ovvero il numero di anni luce per cui è concesso viaggiare), qual è la risposta?

È sufficiente iterare su ogni posizione del vettore e controllare se l'elemento è minore del numero di anni luce specificato nella query!

0	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
---	-------------	------------

Data una query (ovvero il numero di anni luce per cui è concesso viaggiare), qual è la risposta?

È sufficiente iterare su ogni posizione del vettore e controllare se l'elemento è minore del numero di anni luce specificato nella query!

## Esempio

Se  $D = 3$ , la risposta al problema è 2.

```
int query(int D) {
    int raggiungibili = 0;

    for (int i = 0; i < N; i++)
        if (distanza[i] <= D)
            raggiungibili++;

    return raggiungibili;
}
```



# Spiegazione teorica

---

## Misura dell'efficienza

Come è possibile valutare quanto è “buono” un algoritmo? Si possono misurare, essenzialmente, due parametri: tempo di esecuzione e memoria occupata.

## Misura dell'efficienza

Come è possibile valutare quanto è “buono” un algoritmo? Si possono misurare, essenzialmente, due parametri: tempo di esecuzione e memoria occupata.

## Misura del tempo

- Numero di linee di codice
- Tempo di CPU

## Misura dell'efficienza

Come è possibile valutare quanto è “buono” un algoritmo? Si possono misurare, essenzialmente, due parametri: tempo di esecuzione e memoria occupata.

## Misura del tempo

- Numero di linee di codice
- Tempo di CPU
- *Numero di istruzioni eseguite*

# Contare il numero istruzioni

Esempio: quante istruzioni vengono eseguite?

```
int query(int D) {  
    int raggiungibili = 0;  
  
    for (int i = 0; i < N; i++)  
        if (distanza[i] <= D)  
            raggiungibili++;  
  
    return raggiungibili;  
}
```

# Contare il numero istruzioni

Esempio: quante istruzioni vengono eseguite?

```
int query(int D) {  
    int raggiungibili = 0;  
  
    for (int i = 0; i < N; i++)  
        if (distanza[i] <= D)  
            raggiungibili++;  
  
    return raggiungibili;  
}
```

$$T(n) = 1 + 1 + (n + 1) + (n + 1) + n + n + 1 = 4n + 5$$

## Soluzioni *troppo* lente

Confrontiamo tre algoritmi con il seguente numero di istruzioni:  
 $1000N$ ,  $100N^2$ ,  $2^N$ . Qual è il più veloce\*?

\* Assumendo  $10^6$  operazioni al secondo.

## Soluzioni *troppo* lente

Confrontiamo tre algoritmi con il seguente numero di istruzioni:  $1000N$ ,  $100N^2$ ,  $2^N$ . Qual è il più veloce\*?

\* Assumendo  $10^6$  operazioni al secondo.

$N$	$t(1000N)$	$t(100N^2)$	$t(2^N)$
10	10 ms	10 ms	1 ms
20	20 ms	40 ms	1 s



## Soluzioni *troppo* lente

Confrontiamo tre algoritmi con il seguente numero di istruzioni:  $1000N$ ,  $100N^2$ ,  $2^N$ . Qual è il più veloce\*?

\* Assumendo  $10^6$  operazioni al secondo.

$N$	$t(1000N)$	$t(100N^2)$	$t(2^N)$
10	10 ms	10 ms	1 ms
20	20 ms	40 ms	1 s
50	50 ms	250 ms	35 anni

## Soluzioni *troppo* lente

Confrontiamo tre algoritmi con il seguente numero di istruzioni:  $1000N$ ,  $100N^2$ ,  $2^N$ . Qual è il più veloce\*?

\* Assumendo  $10^6$  operazioni al secondo.

$N$	$t(1000N)$	$t(100N^2)$	$t(2^N)$
10	10 ms	10 ms	1 ms
20	20 ms	40 ms	1 s
50	50 ms	250 ms	35 anni
100	100 ms	1 s	$\gg$

$\gg$  = maggiore dell'età dell'universo

## Notazione asintotica $\mathcal{O}$

Si dice che una funzione  $f(n)$  è asintotica a  $\mathcal{O}(g(n))$  se da un certo punto in poi  $f(n) < c \cdot g(n)$ .

## Notazione asintotica $\mathcal{O}$

Si dice che una funzione  $f(n)$  è asintotica a  $\mathcal{O}(g(n))$  se da un certo punto in poi  $f(n) < c \cdot g(n)$ .

## Esempio

- $4n + 5 = \mathcal{O}(n)$
- $n^2 + 100n = \mathcal{O}(n^2)$
- $2^n + 3n^4 = \mathcal{O}(2^n)$

# Complessità computazionale

## Notazione asintotica $\mathcal{O}$

Si dice che una funzione  $f(n)$  è asintotica a  $\mathcal{O}(g(n))$  se da un certo punto in poi  $f(n) < c \cdot g(n)$ .

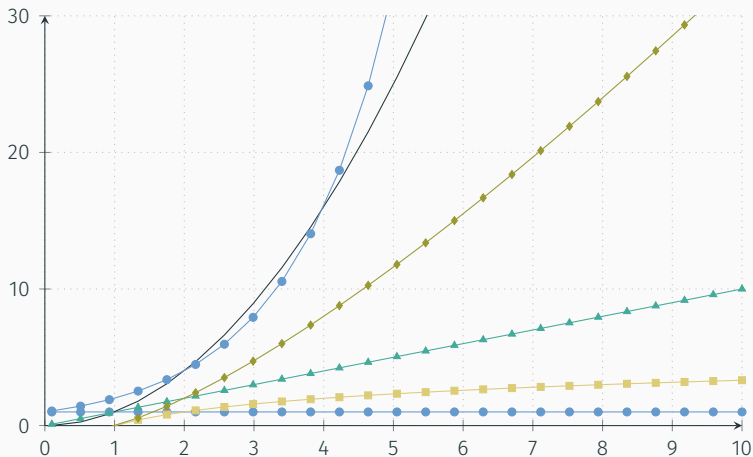
## Esempio

- $4n + 5 = \mathcal{O}(n)$
- $n^2 + 100n = \mathcal{O}(n^2)$
- $2^n + 3n^4 = \mathcal{O}(2^n)$

## Complessità computazionale

La stima asintotica del tempo di esecuzione di un algoritmo è detta “complessità computazionale”.

# Gerarchia degli infiniti



$$1 \ll \log n \ll n \ll n \log n \ll n^2 \ll 2^n \ll n!$$

## Tempo della soluzione naïve

La soluzione progettata per risolvere il problema impiega  $\mathcal{O}(N)$  per calcolare il vettore **distanza** e  $\mathcal{O}(N)$  per ogni query. L'algoritmo impiega quindi  $N + Q \cdot N = \mathcal{O}(Q \cdot N)$ .

# Tempo della soluzione naïve

La soluzione progettata per risolvere il problema impiega  $\mathcal{O}(N)$  per calcolare il vettore **distanza** e  $\mathcal{O}(N)$  per ogni query. L'algoritmo impiega quindi  $N + Q \cdot N = \mathcal{O}(Q \cdot N)$ .

Consideriamo vari scenari con  $N$  stelle e  $Q$  query.

$N$	$Q$	$N \cdot Q$	tempo*
10	100	1000	1 ms
1000	1000	1 000 000	1 s
100 000	100 000	$10^{10}$	2,7 h

\* Assumendo  $10^6$  operazioni al secondo.



Dato un vettore  $V$  contenente  $N$  valori, è possibile ordinare *secondo un certo criterio* i valori.

5	2	3	8	1
---	---	---	---	---

Un ordinamento classico, dato un vettore di numeri, è quello crescente.

1	2	3	5	8
---	---	---	---	---

Esistono numerosissimi algoritmi di ordinamento. In linea di massima, esistono algoritmi *lenti* e algoritmi *veloci*: ovviamente a noi interessano questi ultimi!

## Esempio

- “Bubble sort” è un algoritmo con complessità  $\mathcal{O}(N^2)$ .
- “Quick sort” è un algoritmo con complessità  $\mathcal{O}(N \log N)$ .

# Algoritmi di ordinamento

Esistono numerosissimi algoritmi di ordinamento. In linea di massima, esistono algoritmi *lenti* e algoritmi *veloci*: ovviamente a noi interessano questi ultimi!

## Esempio

- “Bubble sort” è un algoritmo con complessità  $\mathcal{O}(N^2)$ .
- “Quick sort” è un algoritmo con complessità  $\mathcal{O}(N \log N)$ .

## STL

In C++ esiste una funzione, messa a disposizione dalle librerie standard, che esegue l'ordinamento in  $\mathcal{O}(N \log N)$ . Non è quindi necessario saperlo scrivere, ma solo sapere che esiste!

```
#include <algorithm>

using namespace std;

int main()
{
    int vettore[10];
    for (int i = 0; i < 10; i++)
        cin >> vettore[i];

    sort(vettore, vettore + 10);
}
```

## Ordinamento personalizzato in C++

```
#include <algorithm>

using namespace std;

bool confronta(int a, int b) {
    return (a > b);
}

int main()
{
    int vettore[10];
    for (int i = 0; i < 10; i++)
        cin >> vettore[i];

    sort(vettore, vettore + 10, confronta);
}
```

# Ricerca di un elemento in un vettore

Scrivere un algoritmo che cerchi un valore  $K$  all'interno di un vettore  $V$  contenente  $N$  interi.

## Esempio

5	2	3	8	1	7	4	6
---	---	---	---	---	---	---	---

$$K = 7$$

# Ricerca di un elemento in un vettore

Scrivere un algoritmo che cerchi un valore  $K$  all'interno di un vettore  $V$  contenente  $N$  interi.

## Esempio

5	2	3	8	1	7	4	6
---	---	---	---	---	---	---	---

$$K = 7$$

```
int pos = 0;
while (pos < N && V[pos] != K)
    pos++;
```

# Ricerca di un elemento in un vettore

Qual è la complessità computazionale dell'algoritmo?

## Algoritmo di ricerca

```
int pos = 0;
while (pos < N && V[pos] != K)
    pos++;
```

Dopo quanti passi, in media, mi aspetto di trovare l'elemento? Qual è il caso peggiore?



## Ricerca di un elemento in un vettore

Qual è la complessità computazionale dell'algoritmo?

### Algoritmo di ricerca

```
int pos = 0;
while (pos < N && V[pos] != K)
    pos++;
```

Dopo quanti passi, in media, mi aspetto di trovare l'elemento? Qual è il caso peggiore?  $\mathcal{O}(N)$

# Ricerca di un elemento in un vettore ordinato

Scrivere un algoritmo che cerchi un valore  $K$  all'interno di un vettore  $V$  contenente  $N$  interi ordinati.

## Esempio

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

$$K = 3$$

# Ricerca di un elemento in un vettore ordinato

Scrivere un algoritmo che cerchi un valore  $K$  all'interno di un vettore  $V$  contenente  $N$  interi ordinati.

## Esempio

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

$$K = 3$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

# Ricerca di un elemento in un vettore ordinato

Scrivere un algoritmo che cerchi un valore  $K$  all'interno di un vettore  $V$  contenente  $N$  interi ordinati.

## Esempio

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

$$K = 3$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

1	2	3	4
---	---	---	---

# Ricerca di un elemento in un vettore ordinato

Scrivere un algoritmo che cerchi un valore  $K$  all'interno di un vettore  $V$  contenente  $N$  interi ordinati.

## Esempio

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

$$K = 3$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

1	2	3	4
---	---	---	---

3	4
---	---

```
int ricerca_binaria(int K) {
    int i = 0, f = N - 1, m;
    while (i <= f)
    {
        m = (i + f) / 2;
        if (V[m] == K)
            return m;
        if (V[m] < K)
            i = m + 1;
        else
            f = m - 1;
    }
    return -1;
}
```

```
int ricerca_binaria(int K) {
    int i = 0, f = N - 1, m;
    while (i <= f)
    {
        m = (i + f) / 2;
        if (V[m] == K)
            return m;
        if (V[m] < K)
            i = m + 1;
        else
            f = m - 1;
    }
    return -1;
}
```

Complessità computazionale:  $\mathcal{O}(\log_2 N)$ .

```
#include <algorithm>
```

```
int vettore[10];
```

```
bool trovato = binary_search(vettore, vettore + 10, 3);
```



```
#include <algorithm>

int vettore[10];

bool trovato = binary_search(vettore, vettore + 10, 3);

int pos = lower_bound(vettore, vettore + 10, 7) - vettore;
if (pos != 10)
    cout << "Elemento 7 trovato in posizione " << pos;
else
    cout << "Elemento 7 non trovato";
```

Soluzione ottima

---

## “Anno luce” - Soluzione ottima

0	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	3
---	-------------	------------	---	---

Il quesito era:

### Query

Data una query (ovvero il numero di anni luce per cui è concesso viaggiare), qual è la risposta?

0	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	3
---	-------------	------------	---	---

Il quesito era:

## Query

Data una query (ovvero il numero di anni luce per cui è concesso viaggiare), qual è la risposta?

E se decidessimo di ordinare il vettore **distanza**?

0	1	$\sqrt{3}$	3	$2\sqrt{3}$
---	---	------------	---	-------------

0	1	$\sqrt{3}$	3	$2\sqrt{3}$
---	---	------------	---	-------------

## Esempio

Quante stelle sono raggiungibili in 1 anno luce?

0	1	$\sqrt{3}$	3	$2\sqrt{3}$
---	---	------------	---	-------------

## Esempio

Quante stelle sono raggiungibili in 1 anno luce?

0	1	$\sqrt{3}$	3	$2\sqrt{3}$
---	---	------------	---	-------------

0	1	$\sqrt{3}$	3	$2\sqrt{3}$
---	---	------------	---	-------------

## Esempio

Quante stelle sono raggiungibili in 1 anno luce?

0	1	$\sqrt{3}$	3	$2\sqrt{3}$
---	---	------------	---	-------------

Quante stelle sono raggiungibili in 2 anni luce?

0	1	$\sqrt{3}$	3	$2\sqrt{3}$
---	---	------------	---	-------------

## Esempio

Quante stelle sono raggiungibili in 1 anno luce?

0	1	$\sqrt{3}$	3	$2\sqrt{3}$
---	---	------------	---	-------------

Quante stelle sono raggiungibili in 2 anni luce?

0	1	$\sqrt{3}$	3	$2\sqrt{3}$
---	---	------------	---	-------------



## “Anno luce” - Soluzione ottima

Il nostro algoritmo prevede quindi un ordinamento iniziale del vettore **distanza** (che è lungo esattamente  $N$ ).

Risponde poi alle  $Q$  query eseguendo per ciascuna una ricerca binaria del primo valore nel vettore maggiore della distanza che ci è concesso viaggiare.

## “Anno luce” - Soluzione ottima

Il nostro algoritmo prevede quindi un ordinamento iniziale del vettore **distanza** (che è lungo esattamente  $N$ ).

Risponde poi alle  $Q$  query eseguendo per ciascuna una ricerca binaria del primo valore nel vettore maggiore della distanza che ci è concesso viaggiare.

Cerchiamo di capire se è migliore di quello precedente. Sappiamo che  $N \leq 100\,000$  e  $Q \leq 100\,000$ , quindi possiamo considerare per semplicità  $Q = N$ .

## “Anno luce” - Soluzione ottima

Il nostro algoritmo prevede quindi un ordinamento iniziale del vettore **distanza** (che è lungo esattamente  $N$ ).

Risponde poi alle  $Q$  query eseguendo per ciascuna una ricerca binaria del primo valore nel vettore maggiore della distanza che ci è concesso viaggiare.

Cerchiamo di capire se è migliore di quello precedente. Sappiamo che  $N \leq 100\,000$  e  $Q \leq 100\,000$ , quindi possiamo considerare per semplicità  $Q = N$ .

---

Soluzione	Fase iniziale	Risposta alle query	Somma
-----------	---------------	---------------------	-------

## “Anno luce” - Soluzione ottima

Il nostro algoritmo prevede quindi un ordinamento iniziale del vettore **distanza** (che è lungo esattamente  $N$ ).

Risponde poi alle  $Q$  query eseguendo per ciascuna una ricerca binaria del primo valore nel vettore maggiore della distanza che ci è concesso viaggiare.

Cerchiamo di capire se è migliore di quello precedente. Sappiamo che  $N \leq 100\,000$  e  $Q \leq 100\,000$ , quindi possiamo considerare per semplicità  $Q = N$ .

Soluzione	Fase iniziale	Risposta alle query	Somma
Naïve	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(Q \cdot N)$	$\mathcal{O}(N^2)$

## “Anno luce” - Soluzione ottima

Il nostro algoritmo prevede quindi un ordinamento iniziale del vettore **distanza** (che è lungo esattamente  $N$ ).

Risponde poi alle  $Q$  query eseguendo per ciascuna una ricerca binaria del primo valore nel vettore maggiore della distanza che ci è concesso viaggiare.

Cerchiamo di capire se è migliore di quello precedente. Sappiamo che  $N \leq 100\,000$  e  $Q \leq 100\,000$ , quindi possiamo considerare per semplicità  $Q = N$ .

Soluzione	Fase iniziale	Risposta alle query	Somma
Naïve	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(Q \cdot N)$	$\mathcal{O}(N^2)$
Ottima	$\mathcal{O}(N \log N)$	$\mathcal{O}(Q \cdot \log N)$	$\mathcal{O}(N \log N)$

## “Anno luce” - Soluzione ottima

Il nostro algoritmo prevede quindi un ordinamento iniziale del vettore **distanza** (che è lungo esattamente  $N$ ).

Risponde poi alle  $Q$  query eseguendo per ciascuna una ricerca binaria del primo valore nel vettore maggiore della distanza che ci è concesso viaggiare.

Cerchiamo di capire se è migliore di quello precedente. Sappiamo che  $N \leq 100\,000$  e  $Q \leq 100\,000$ , quindi possiamo considerare per semplicità  $Q = N$ .

Soluzione	Fase iniziale	Risposta alle query	Somma
Naïve	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(Q \cdot N)$	$\mathcal{O}(N^2)$
Ottima	$\mathcal{O}(N \log N)$	$\mathcal{O}(Q \cdot \log N)$	$\mathcal{O}(N \log N)$
Ottima*	$\mathcal{O}(N^2)$	$\mathcal{O}(Q \cdot \log N)$	$\mathcal{O}(N^2)$

\* con ordinamento inefficiente

## Esercizio

Implementare la soluzione ottima al problema “annoluce”.

## Riferimenti

Questa presentazione e soluzione in C++ dell'esercizio:

[https://files.chiodini.org/OII\\_Territoriali\\_2017/](https://files.chiodini.org/OII_Territoriali_2017/)

- Piattaforma di allenamento con correttore e forum:

<https://cms.di.unipi.it>

- Guida alle selezioni territoriali del prof. Bugatti:

[http://www.imparando.net/sito/olimpiadi\\_di\\_informatica.htm](http://www.imparando.net/sito/olimpiadi_di_informatica.htm)